

MECÂNICA ANALÍTICA

Prof. Nivaldo A. Lemos — 1º Semestre de 2010

Primeira Prova — 05/04/2010

Questão 1. (3,0 pontos) Um pêndulo elástico consiste numa massa m capaz de oscilar num plano vertical suspensa por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l . Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a lagrangiana e as equações de Lagrange.

Questão 2. (1,5 ponto) Uma partícula move-se no potencial gravitacional produzido pelas seguintes distribuições de massa homogêneas: (i) esfera de raio R ; (ii) disco de raio R ; (iii) plano semi-infinito. Quais são as componentes de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{L}$ que se conservam em cada caso?

Questão 3. (2,5 pontos) Considere um sistema mecânico sujeito aos vínculos da forma

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0, \quad l = 1, \dots, p$$

com equações de movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^p \lambda_l a_{lk}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Se $h = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L$, prove que

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{l=1}^p \lambda_l a_{lt}.$$

Justifique a seguinte afirmação: se o sistema é holônomo e os vínculos dependem do tempo, h em geral não se conserva mesmo quando L não depende explicitamente do tempo.

Questão 4. (3,0 pontos) A lagrangiana (r, θ, φ) são coordenadas esféricas)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - \frac{eg}{c}\dot{\varphi} \cos\theta$$

descreve o movimento de uma partícula carregada (carga e) no campo $\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$ de um hipotético monopolo magnético situado na origem (g denota a carga magnética do monopolo).

(a) Escreva as equações de Lagrange.

(b) Identifique duas constantes de movimento.

(c) Qual é o significado físico dessas constantes de movimento?